

2018年 東大文系数学

第2問

$$(1) a_7 = \frac{14C_7}{7!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{13 \times 11}{7 \times 6 \times 5} = \frac{143}{210} < 1$$

よって $a_7 < 1$

$$\frac{m+nC_n}{(m+n)!} = \frac{1}{m!n!}$$

$$(2) \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{2nC_n}{n!}}{\frac{2(n-2)C_{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-2)! \times n! \times n! \times n!}$$

$$= \frac{2n \times (2n-1)}{n \times n \times n}$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{n^3}$$

$$= \frac{2(2n-1)}{n^2} \quad \text{よって}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2(2n-1)}{n^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 4n + 2 > 0$$

3.414... < 3.00

$$\Leftrightarrow n < 2 - \sqrt{2}, \quad 2 + \sqrt{2} < n$$

 $n \geq 2$ ための。 $n \geq 4$ になると整数が1つ

$$(3) \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \text{ になると } n \text{ が } n \geq 4 \text{ ための。}$$

$$a_3 > a_4 > a_5 > \dots \quad \text{とある。}$$

$$\text{また } \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \text{ になると } n \text{ は } n \leq 3 \text{ ための。}$$

$$a_1 < a_2 < a_3 \quad \text{とある。}$$

 \Rightarrow ねえ (1) の結果でねえ。 $a_7 < 1$ の3つの不等式より

$$a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > 1 > a_7 > \dots$$

とある。

$$\text{また } a_n = \frac{2nC_n}{n!} > 0 \text{ より}$$

 $n \geq 7$ になると a_n は整数になると a_n は存在しない
よって a_n が整数だとすると $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

$$a_1 = \frac{2C_1}{1!} = 2$$

$$a_2 = \frac{4C_2}{2!} = 3$$

$$a_3 = \frac{6C_3}{3!} = \frac{10}{3}$$

$$a_4 = \frac{8C_4}{4!} = \frac{35}{12}$$

$$a_5 = \frac{10C_5}{5!} = \frac{21}{10}$$

$$a_6 = \frac{12C_6}{6!} = \frac{77}{60}$$

以上より $n \geq 1$ で a_n が整数になるとするのは a_1 と a_2 だけ